ESTALMAT
Comunidad de Madrid

ESTALMAT
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

# SEMINARIO ESTALMAT
# MURCIA
# 18 /04/2026

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES
FECYT INNOVACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

“No hay camino real hacia la Geometría” (Euclides, ≈ 300 a. C.)

Rafael Sanzio: La escuela de Atenas (1512, fresco. Ciudad del Vaticano) detalle.

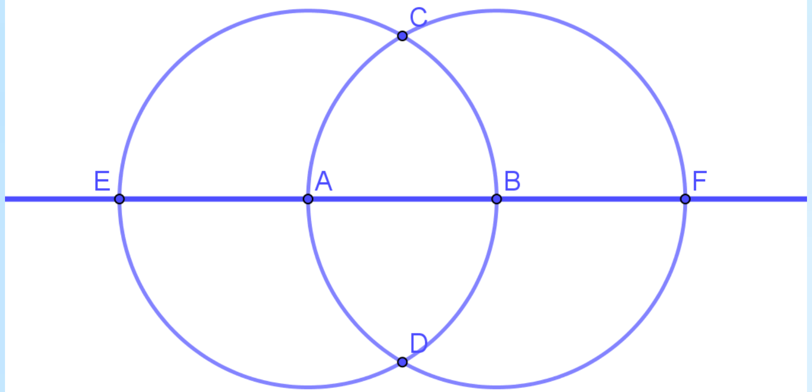
# REGLA Y COMPÁS

# Algunos ejemplos: dos polígonos regulares

**Tenemos un compás y una regla sin medidas marcadas.**

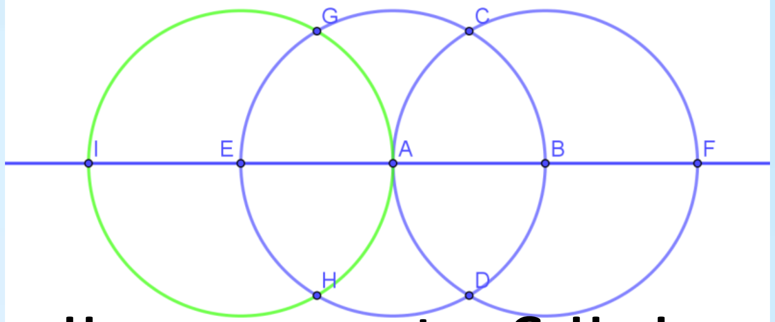
**Marcamos primero dos puntos A y B, y trazamos la recta que determinan.**


**A continuación, trazamos las circunferencias de centros A y B y radio AB.**



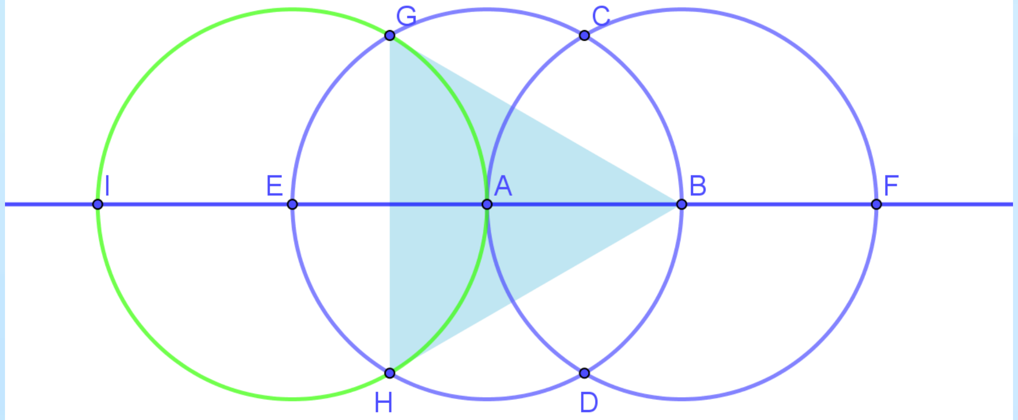

**Aparecen los puntos C, D, E y F.**

**Dibujamos la circunferencia de centro E que pasa por A:**

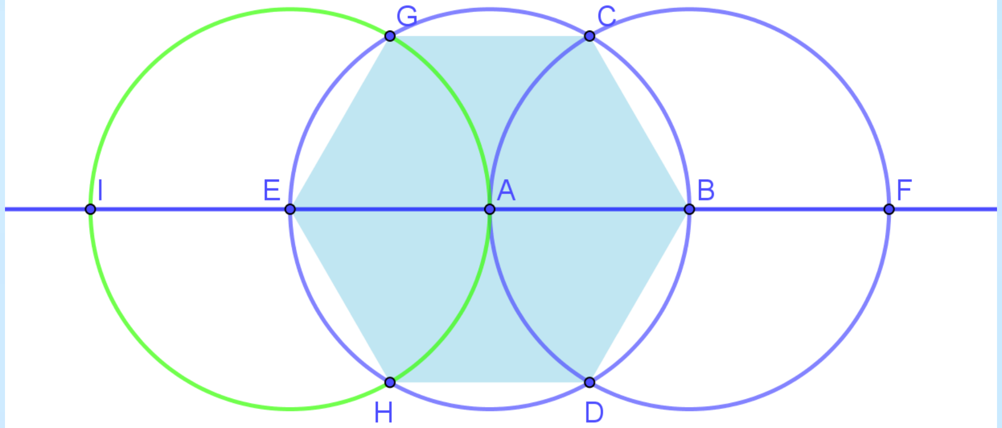



**Hay nuevos puntos: G, H e I.**

**Finalmente unimos los puntos B, C, G, E, H y D, o los puntos G,H y B:**



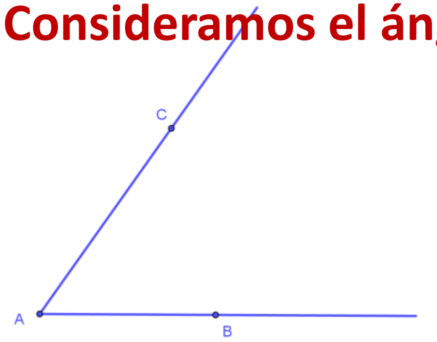

**Triángulo equilátero**



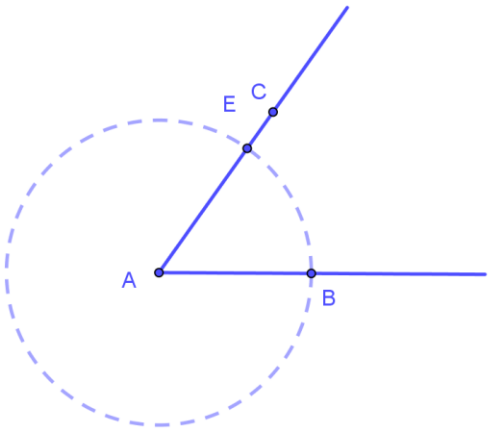

**Hexágono regular**

# Algunos ejemplos: Bisectriz de un ángulo

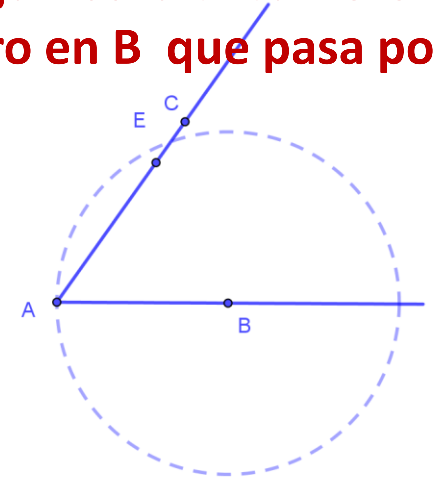
**Consideramos el ángulo BAC:**



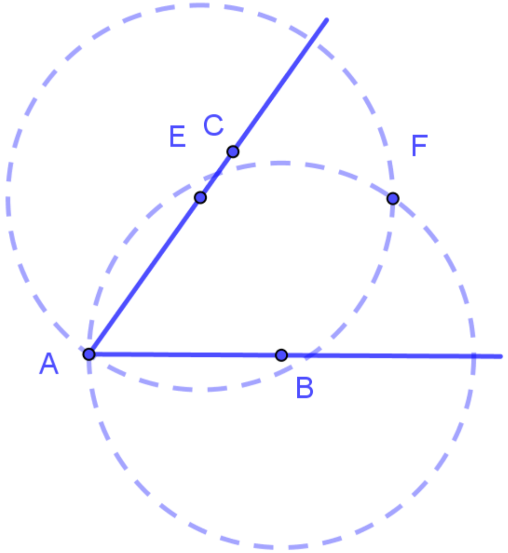

**Trazamos la circunferencia con centro en A que pasa por B y se obtiene el punto E.**



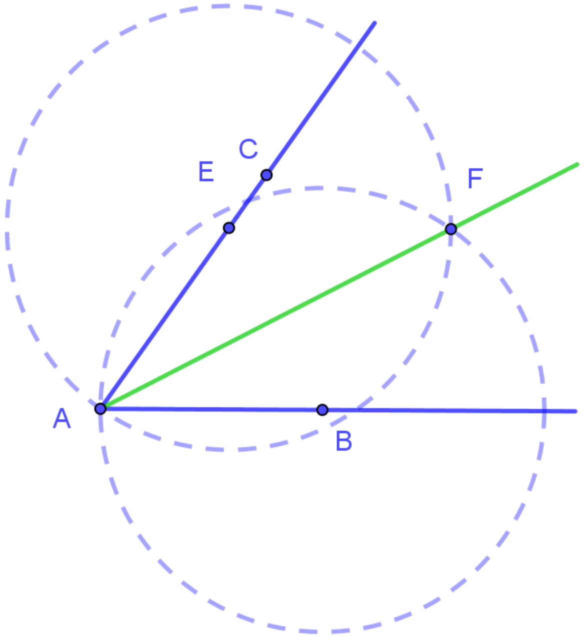

**Dibujamos la circunferencia con centro en B que pasa por A.**




**Y la circunferencia con centro en E que pasa por A.**

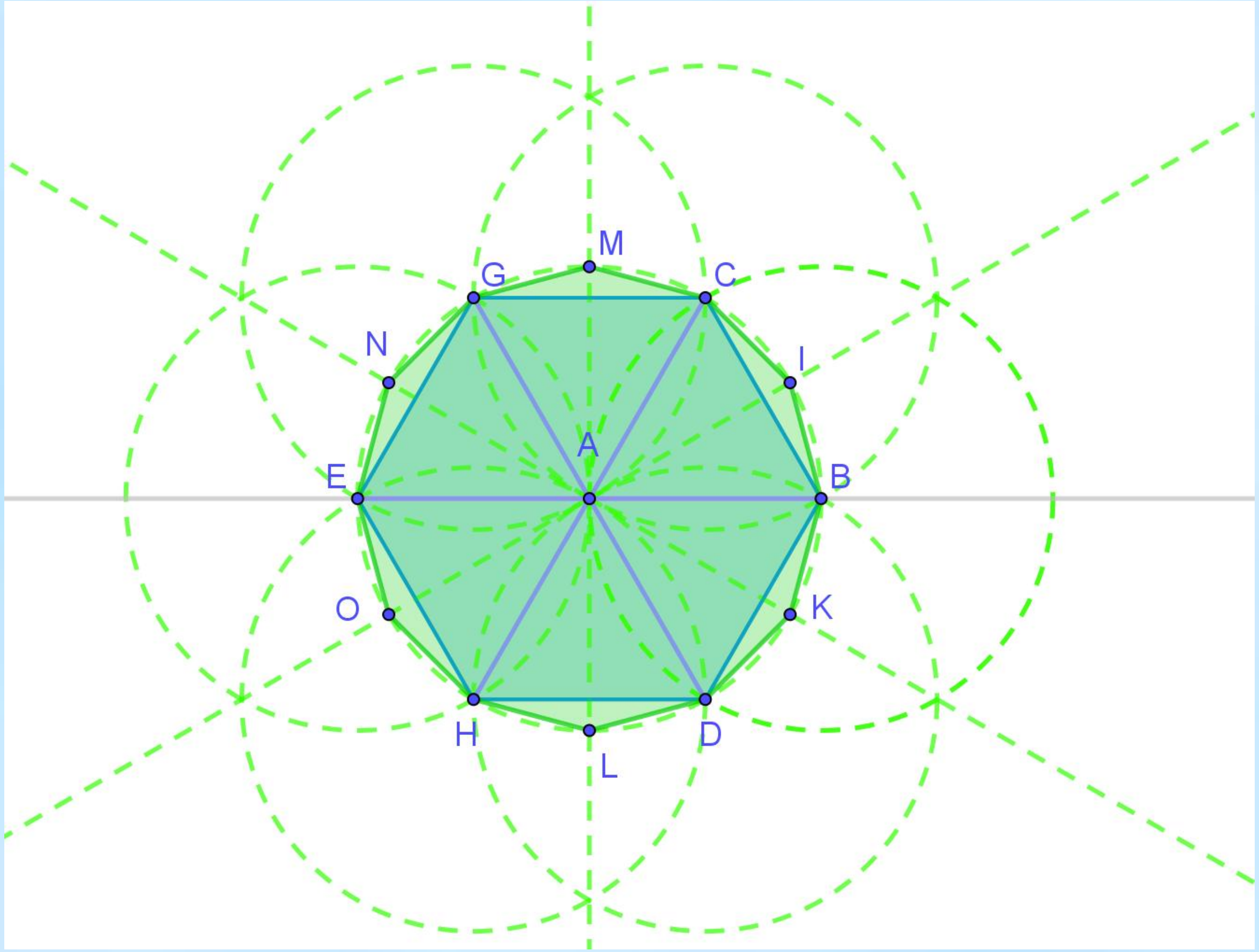



**Finalmente, trazamos la recta AF. Esta semirrecta, que divide al ángulo BAC en dos ángulos iguales BAF y FAC, y se llama bisectriz del ángulo BAC.**



# Algunos ejemplos: Polígonos + Bisectrices

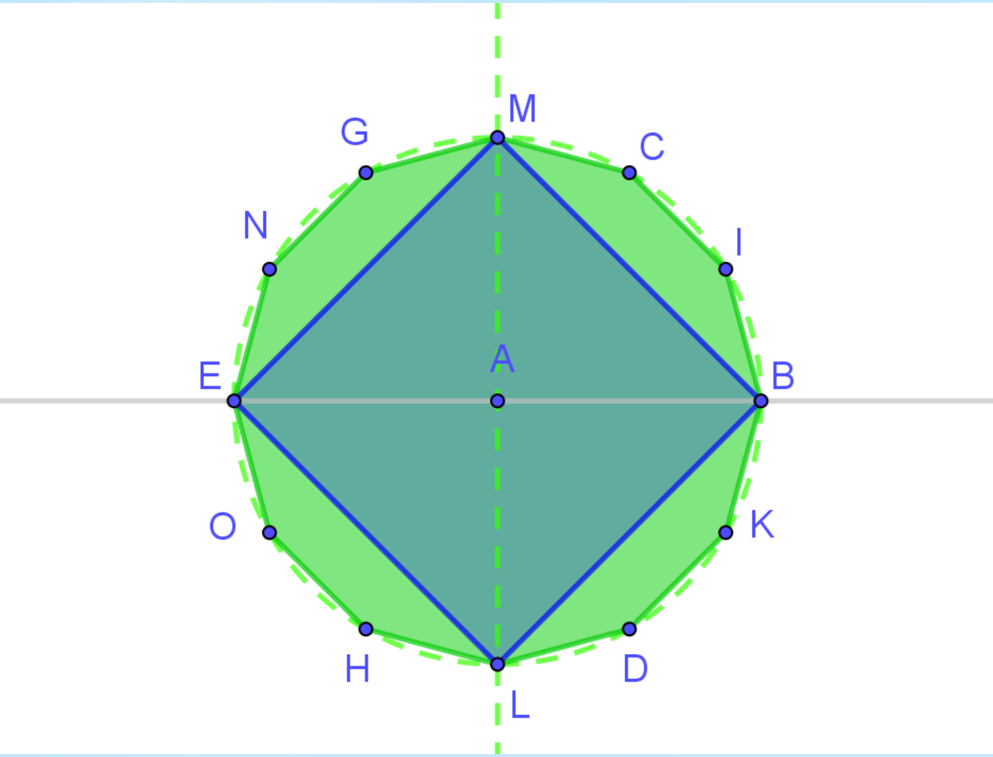
**Si dividimos por la mitad  los ángulos centrales del hexágono regular, construimos un dodecágono regular.**



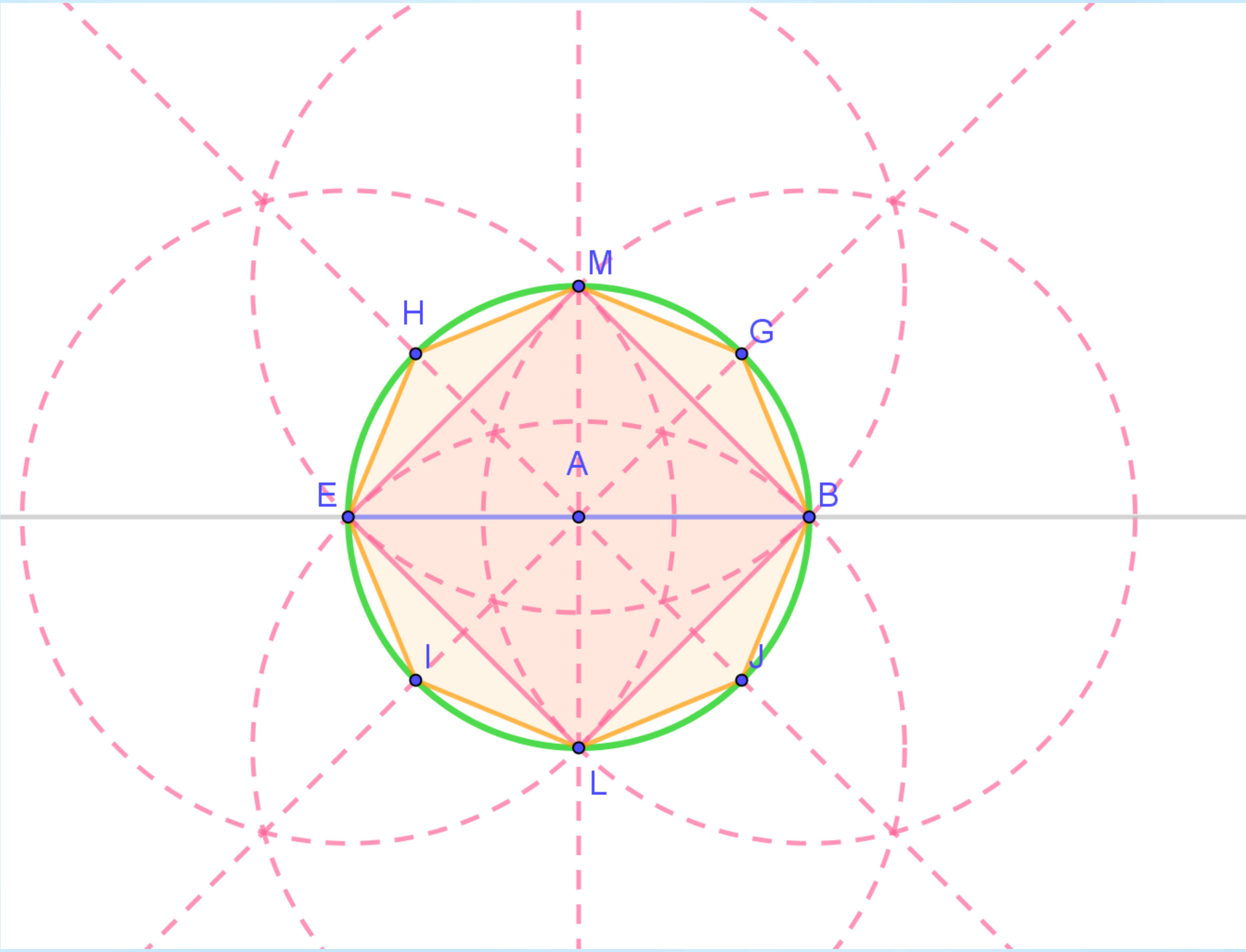

**Si seguimos bisecando ángulos, vamos a poder construir polígonos regulares de 24, 48, 96, ... lados.**

# Algunos ejemplos: Polígonos + Bisectrices

Y, si tomamos un vértice de cada tres del dodecágono regular, obtenemos un cuadrado:




Nuevamente, si a los ángulos centrales del cuadrado los dividimos por la mitad, construimos un octógono regular:



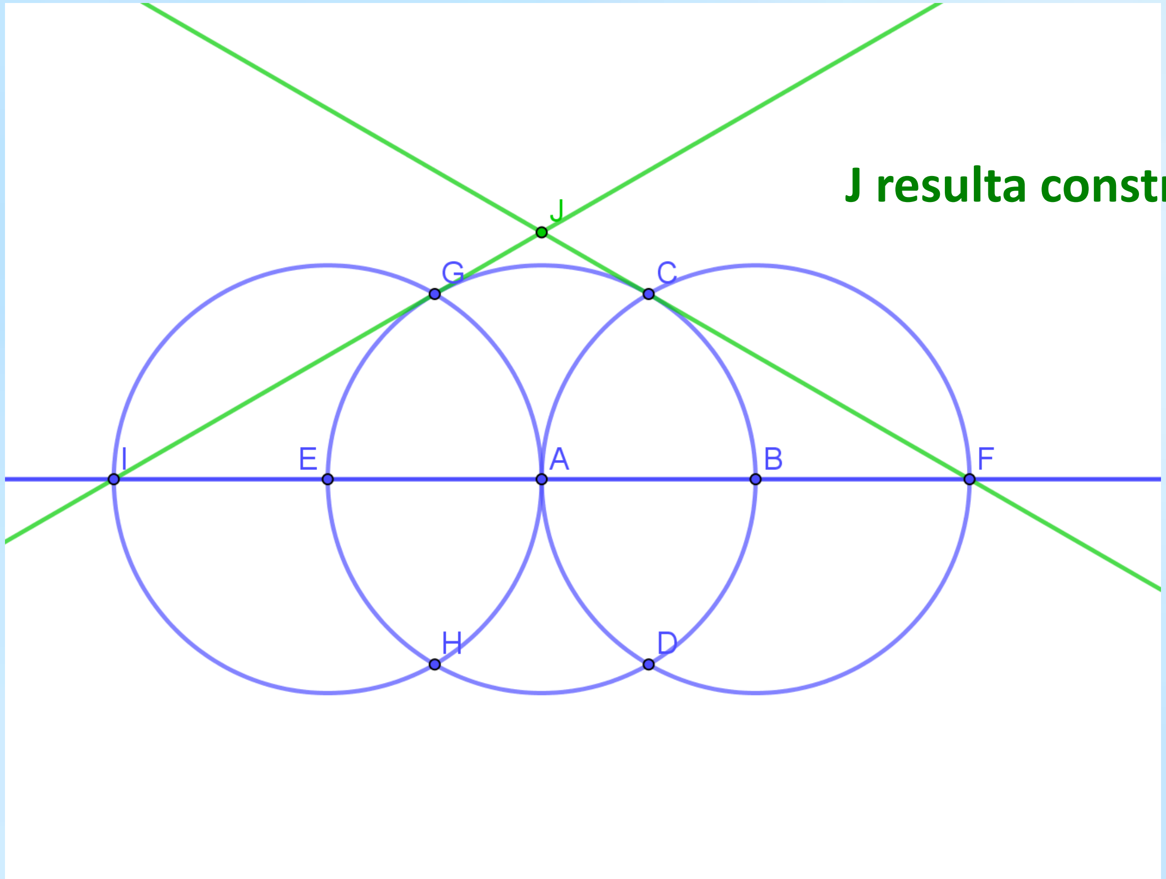

Y, si seguimos bisecando ángulos, vamos a poder construir polígonos regulares de 16, 32, 64, ... lados.

# Las reglas del juego o ¿qué se puede hacer? (y qué no)

**Las normas básicas son:**

- **Se puede trazar la recta que une a dos puntos marcados y la circunferencia con centro en un punto marcado y radio la distancia entre dos puntos marcados.**
- **Todos los puntos que se obtengan del corte de dos rectas, dos circunferencias o una recta y una circunferencia que hemos podido dibujar, pasan a ser puntos marcados y los podemos usar para seguir dibujando.**

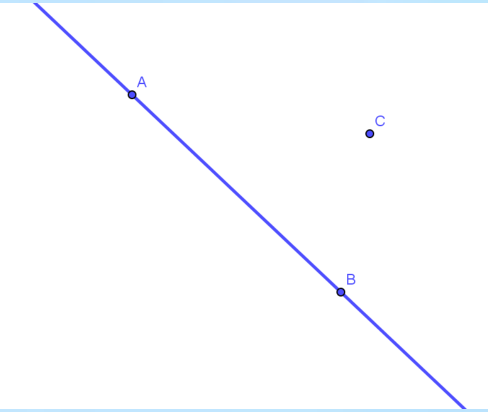
## Ejemplo:



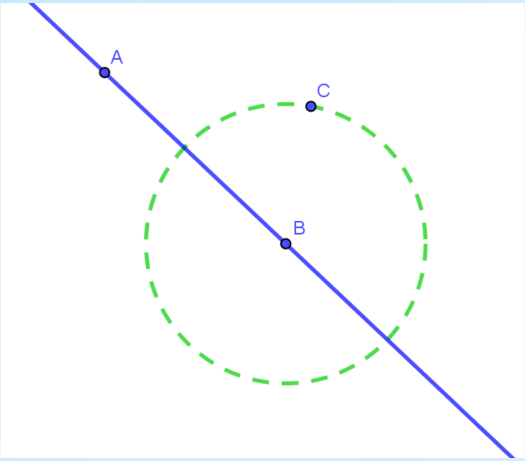

**J resulta construible siguiendo las reglas establecidas.**

# Más construcciones posibles: Perpendiculares

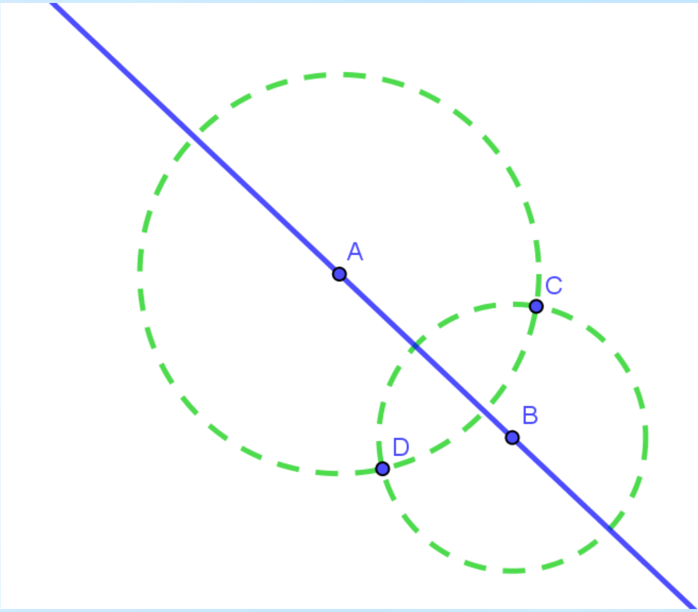
Se puede construir con regla y compás la recta perpendicular desde un punto a una recta determinada por otros dos puntos:



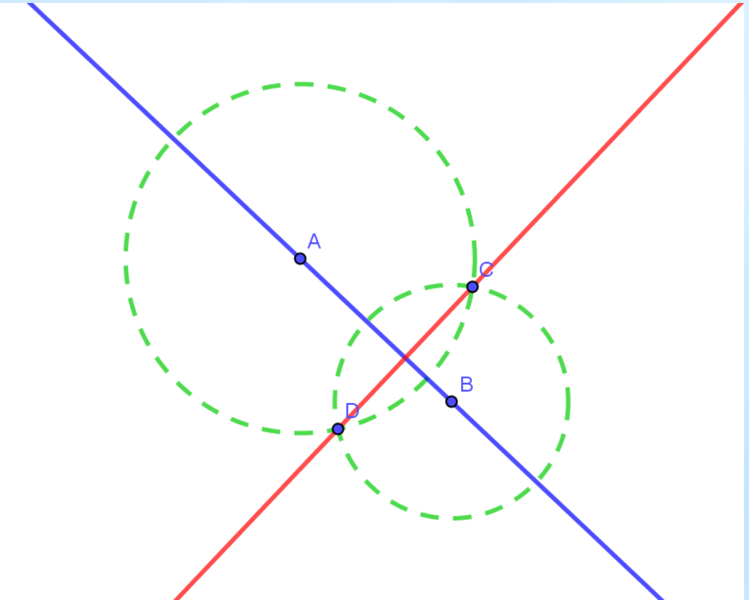

Se traza la circunferencia con centro en B que pasa por C.




Y después la circunferencia con centro A y que pasa por C.



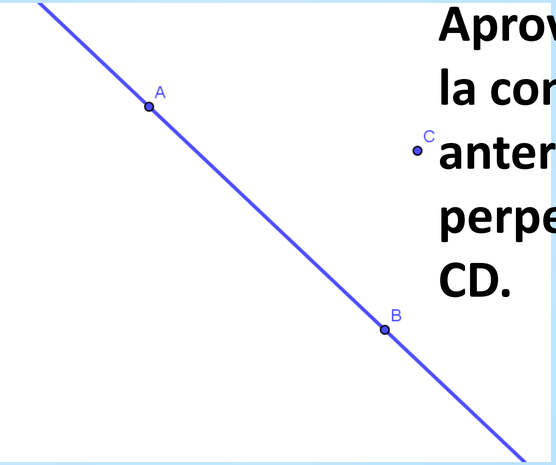

Trazamos la recta que une C y D.



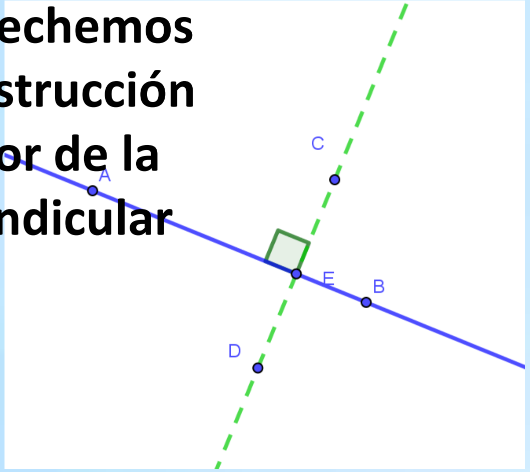

La recta CD es la perpendicular a AB que pasa por C.

# Más construcciones posibles: Paralelas

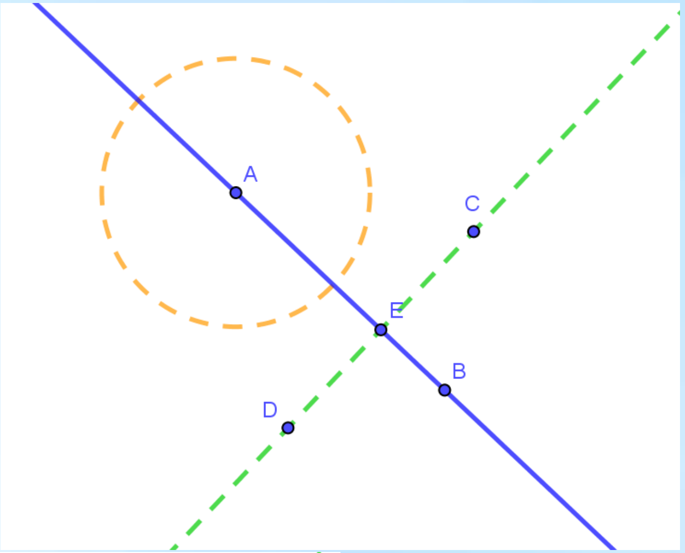
También se puede construir con regla y compás la recta paralela desde un punto a una recta determinada por otros dos puntos:



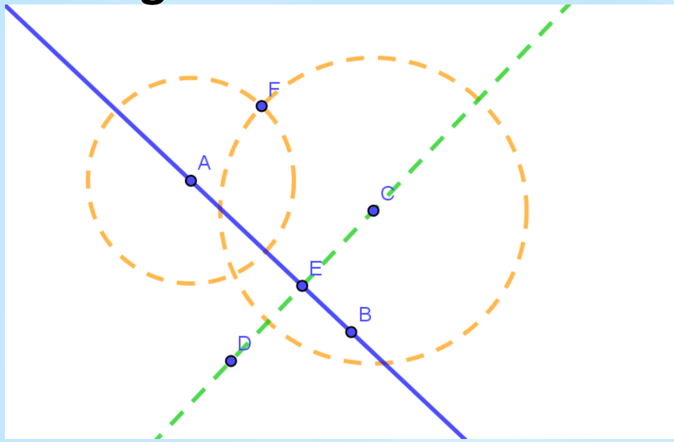

Aprovechemos la construcción anterior de la perpendicular CD.



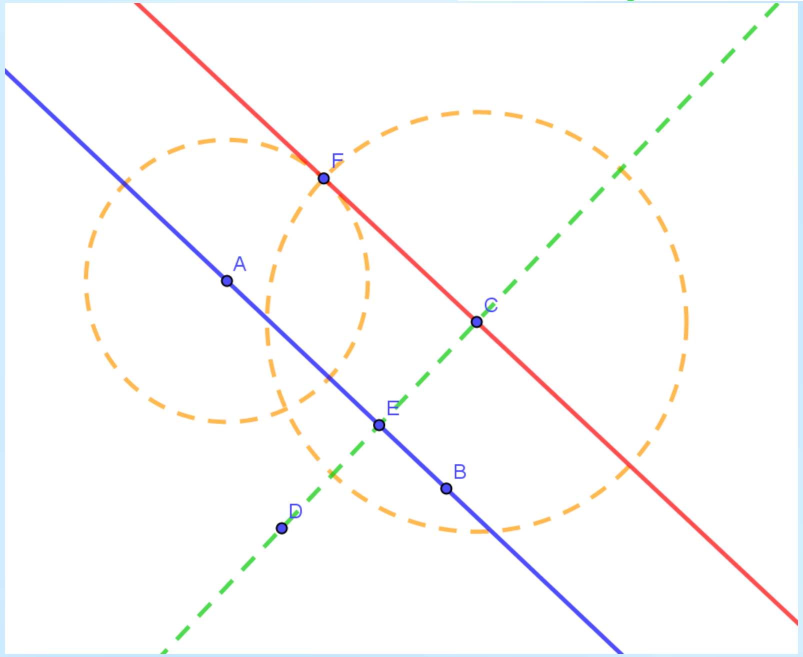

Dibujamos la circunferencia con centro A y radio igual a la distancia de C a E.




Se traza la circunferencia con centro C y radio igual a la distancia de A a E.




La recta CF es la paralela a AB que pasa por C.



# Preguntas posibles

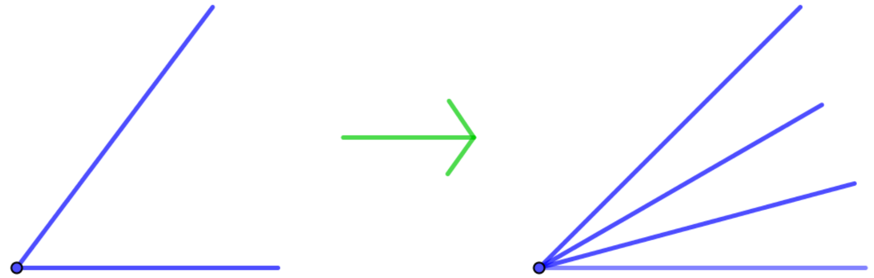
¿Podremos dibujar lo que se nos ocurra usando estas normas? Y si no, ¿qué construcciones podremos hacer y cuáles no?

Algunas de estas preguntas ya fueron formuladas por los matemáticos de la Grecia clásica hace más de 2000 años. Nos dejaron tres problemas clásicos sobre construcciones con regla y compás que fueron resueltos definitivamente en el siglo XIX.

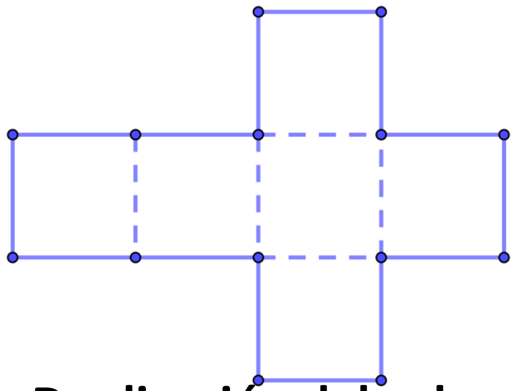
Trataron de responder si hay alguna forma de dividir un ángulo en tres partes iguales utilizando solo regla y compás.

¿Será posible construir un cubo utilizando regla y compás de forma que su volumen sea el doble del volumen del original?

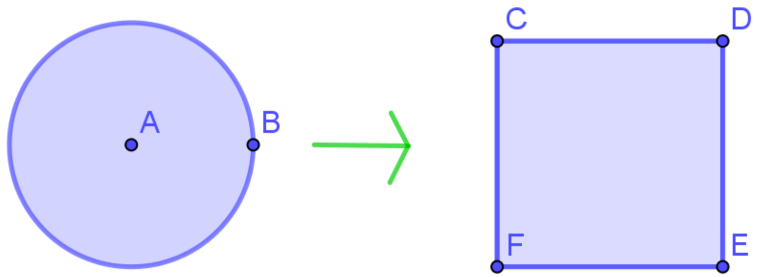
¿Se podrá construir, usando regla y compás, un cuadrado a partir de un círculo con la misma superficie?



Trisección del ángulo



Duplicación del cubo.




Cuadratura del círculo.

# Otro problema: Polígonos

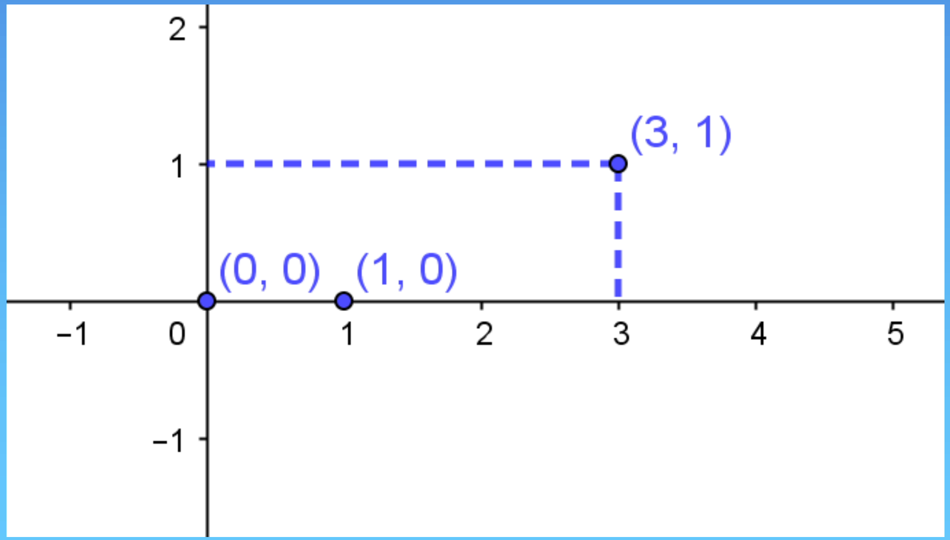
Otra pregunta que puede hacerse está relacionada con los polígonos regulares.

Ya hemos visto que los polígonos de 3, 6, 12, 24 ... lados son construibles con regla y compás. Y también los de 4, 8, 16, 32, ...lados. Pero, ¿y el pentágono? ¿Y los demás?

La pregunta concreta es: ¿Para qué valores de n se puede construir un polígono regular de n lados con regla y compás?

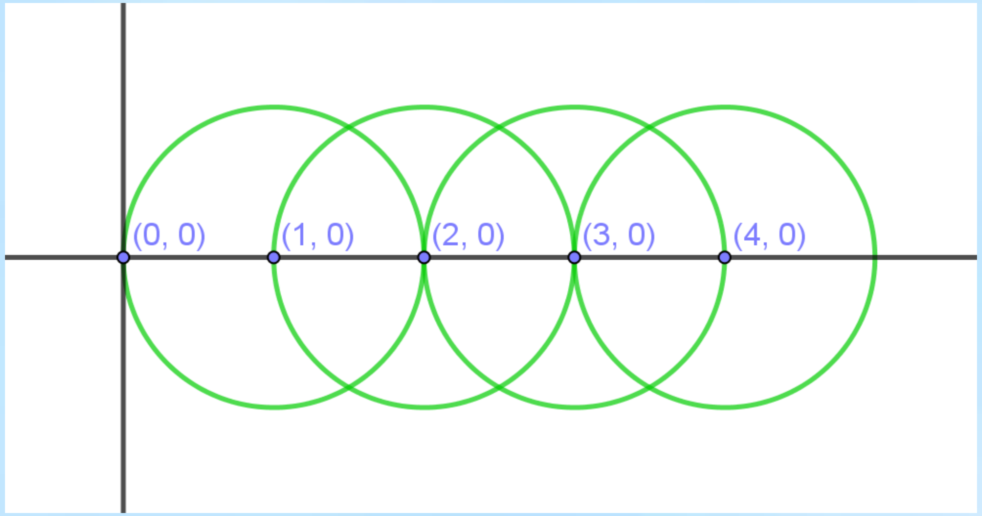
## Un enfoque moderno: Coordenadas.

**Vamos a relacionar la geometría con los números. Y para eso vamos a trabajar en un par de ejes de coordenadas cartesianas.**

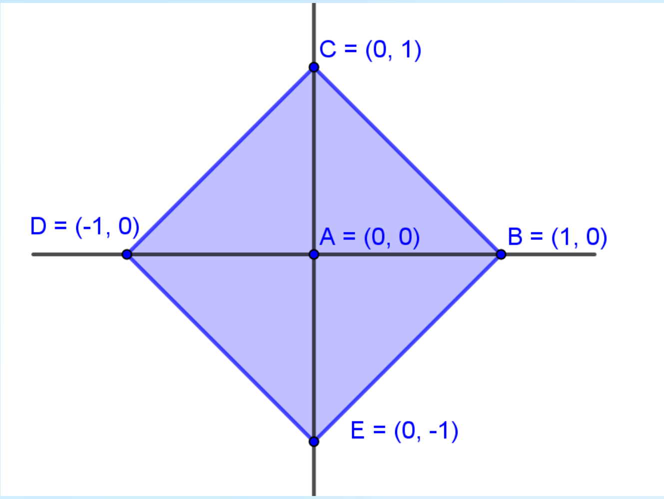


# Números construibles

**Decimos que un número real positivo es construible si es la distancia entre dos puntos construibles.**




**En el cuadrado que construimos observemos el triángulo rectángulo ABC**




**el segmento BC es su hipotenusa:**

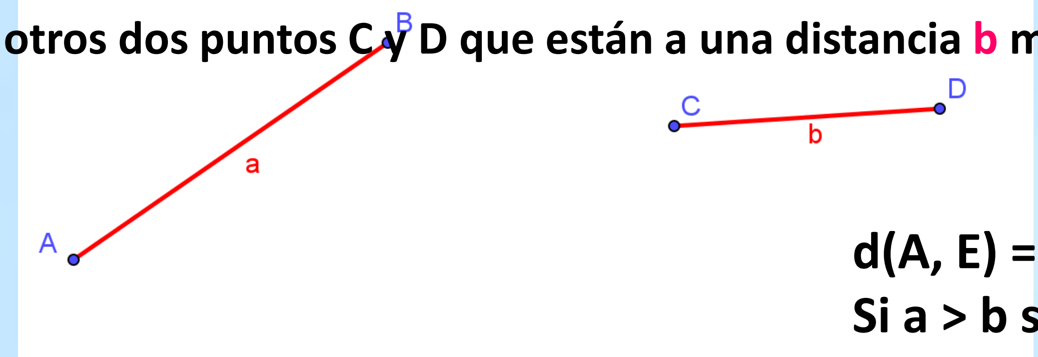
$$d(B,C) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$

**Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número construible**

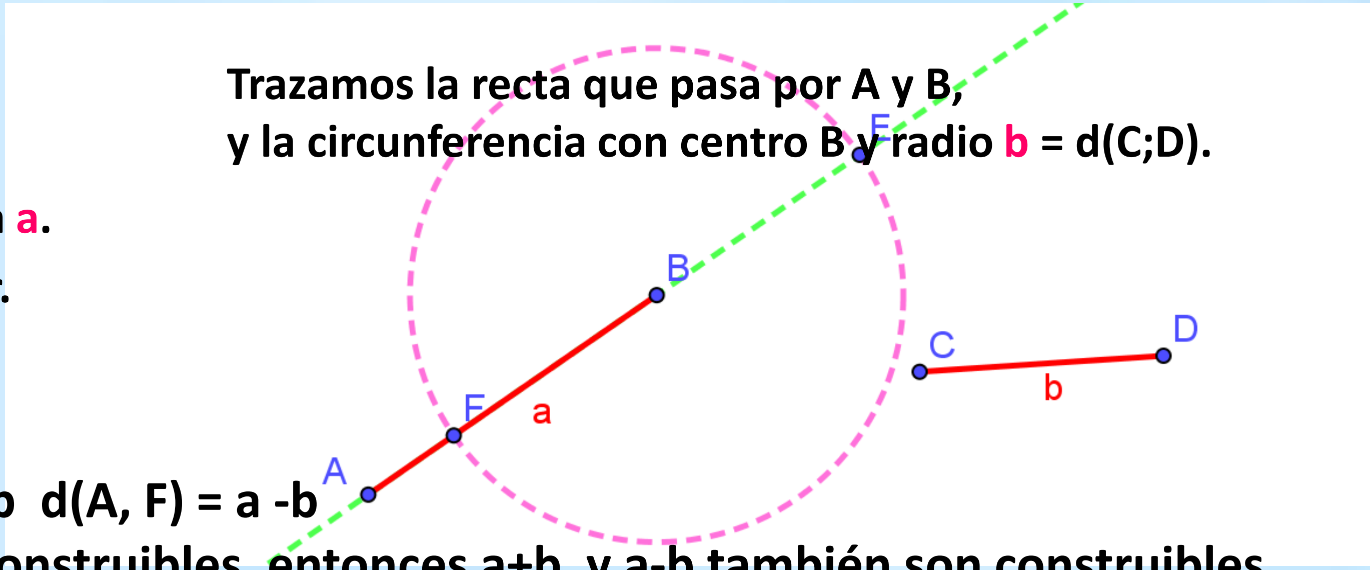
**1, 2, 3, 4, ... son números construibles pues son las distancias al (0, 0) de los puntos construidos sobre el eje X.**

**Consideremos ahora dos puntos A y B que están a distancia a.**

**Y otros dos puntos C y D que están a una distancia b menor.**




**Trazamos la recta que pasa por A y B,**
**y la circunferencia con centro B y radio b = d(C;D).**

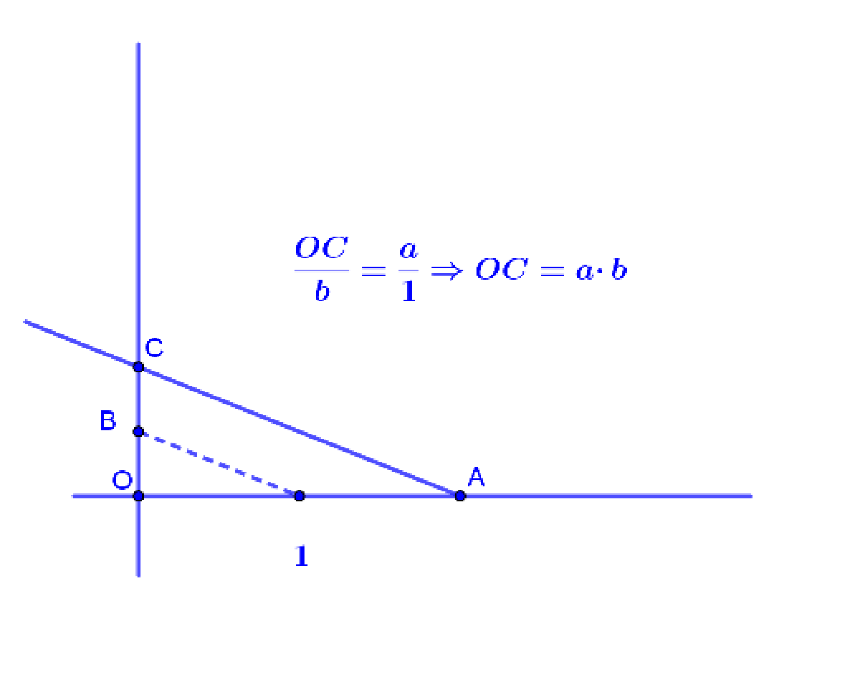


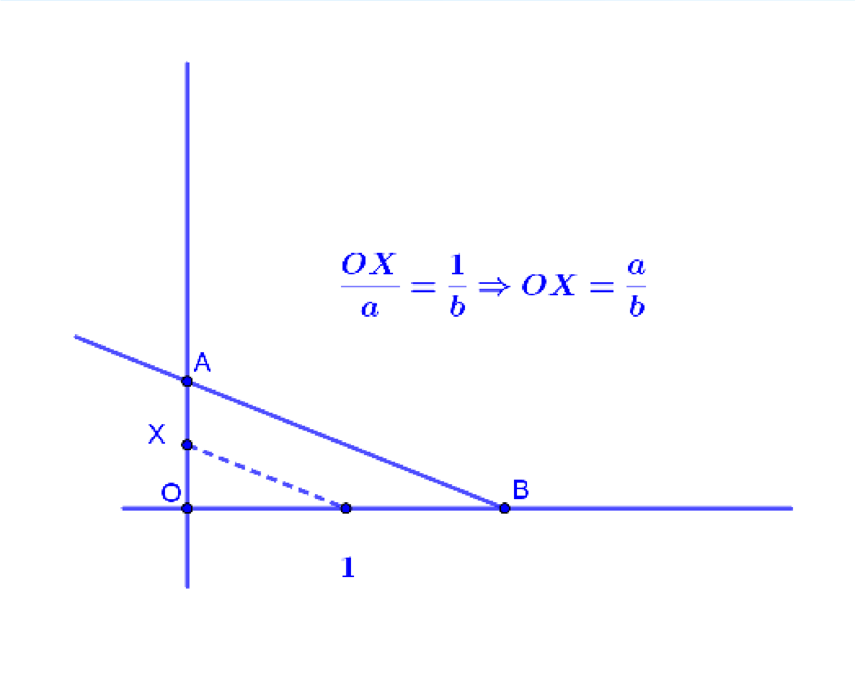

**d(A, E) = a + b  d(A, F) = a -b**

**Si a > b son construibles, entonces a+b  y a-b también son construibles.**

# Números construibles

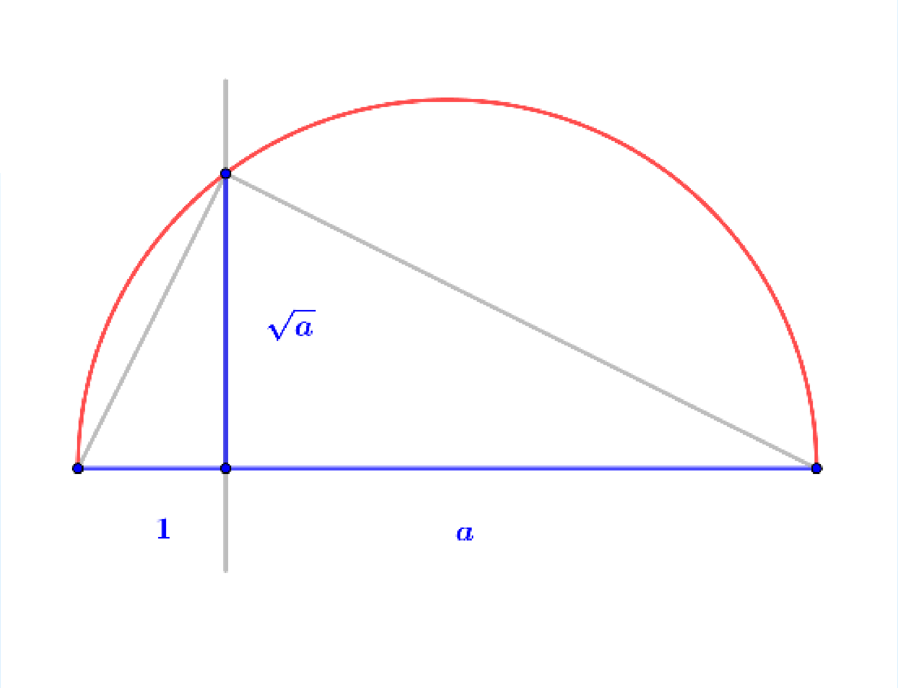
**El producto y el cociente de números construibles también es construible**




.

**La raíz cuadrada de un número construible es construible**



# Números construibles

**Teorema:**

***Un número positivo es construible si y sólo si se puede escribir utilizando los números naturales o cero (0, 1, 2, 3, 4, ...), las operaciones +, −, ×, ÷ y la raíz cuadrada.***

**Por ejemplo:**

- $\mathbf{3, \frac{2}{7}, \sqrt{5}}$
- $\mathbf{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$
- $$\mathbf{-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+}$$
  $$\mathbf{+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}$$

**Todos ellos son números construibles.**

# Números no construibles

A partir de la caracterización anterior, se puede probar utilizando álgebra que hay números no construibles.

Por ejemplo, consideremos la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ donde $a, b, c, d$ son números enteros y $a \neq 0$.

**Teorema:**

Si la ecuación anterior no tiene soluciones racionales, es decir del tipo e/f con e y f enteros, entonces sus soluciones positivas son números no construibles.

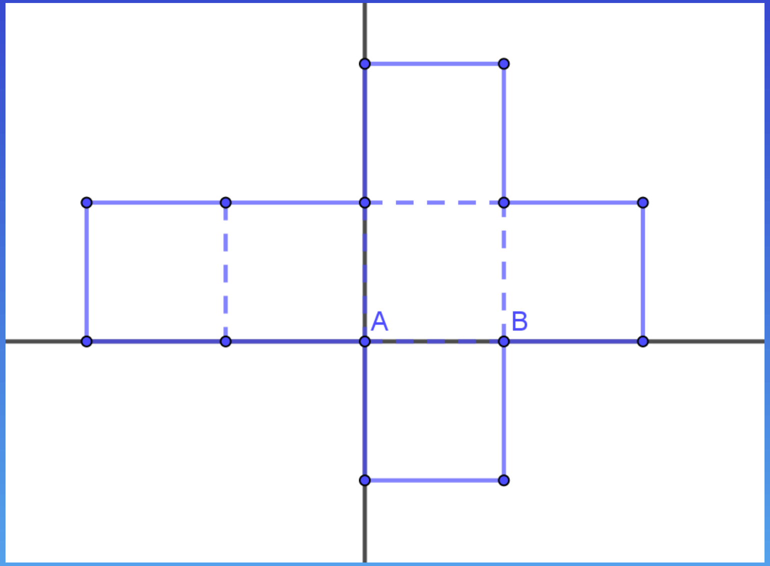
Por ejemplo, consideremos la ecuación: $x^3 - 2 = 0$ que tiene todos sus coeficientes enteros ; sabemos que sus raícen enteras, si es que existen, deben ser divisores de 2 ( $\pm 1, \pm 2$ ) y ninguna sirve. No puede haber soluciones racionales y $\sqrt[3]{2}$ es un número positivo y solución de la ecuación.

**Conclusión:**

**$\sqrt[3]{2}$ no es un número construible.**

# Respuesta a los tres problemas clásicos

## Duplicación del cubo



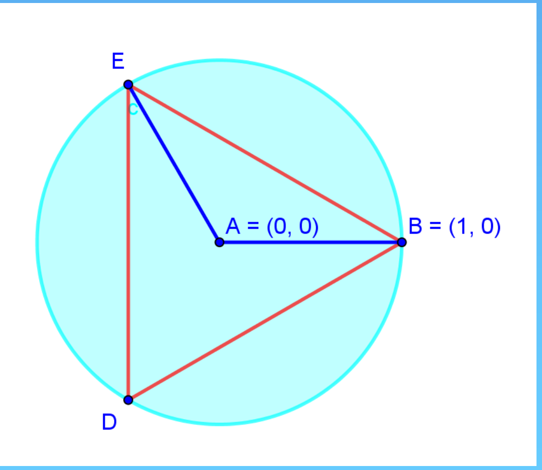

Si consideramos el desarrollo del cubo de lado 1. Su volumen es 1. Por lo tanto, si queremos duplicar su volumen, tendríamos que tener un cubo de volumen V = 2= $l^3$.
Para eso, deberíamos poder construir un cubo de lado $l = \sqrt[3]{2}$.

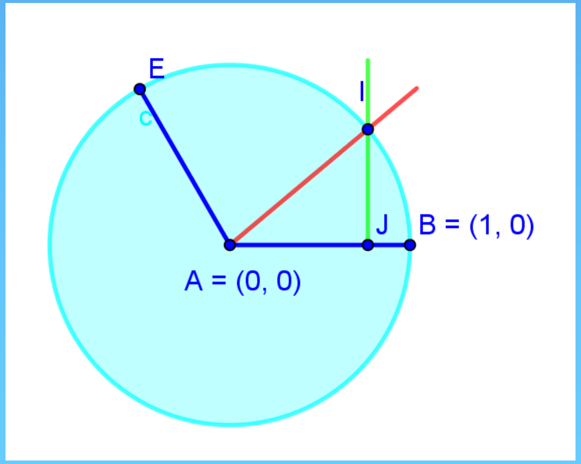
¡Pero acabamos de ver que $\sqrt[3]{2}$ no es construible!

**No se puede duplicar el cubo con regla y compás.**

## Trisección del ángulo

Supongamos que queremos trisecar el ángulo BAE de 120°, entonces tendríamos que poder construir el ángulo IAB de 40°:

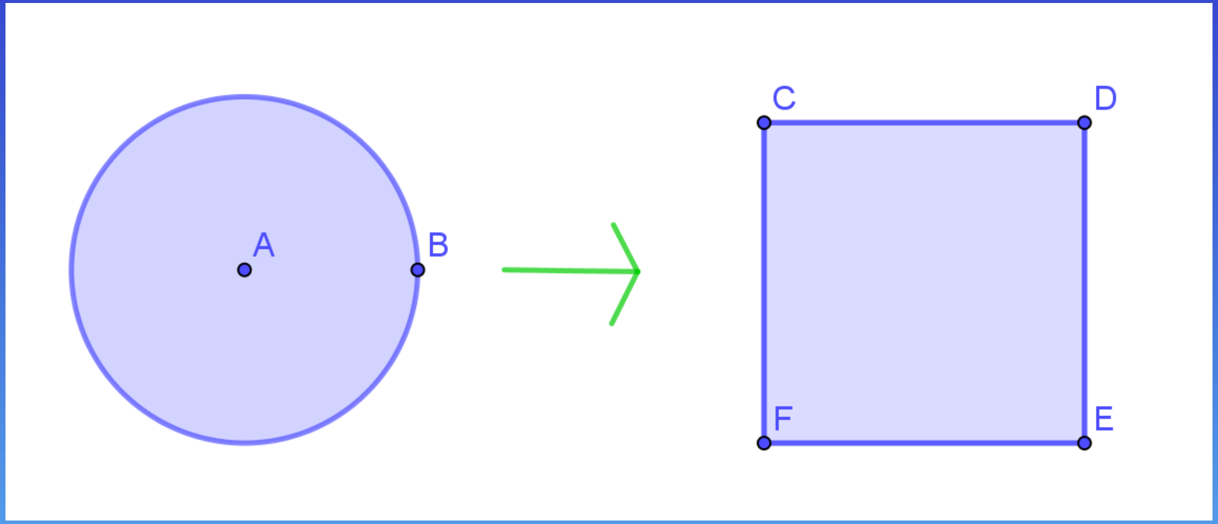



La distancia entre A y J es igual a d = cos(40°), y que satisface la ecuación $8x^3 - 6x + 1 = 0$
Esta ecuación no tiene raíces racionales. **Por tanto, el ángulo de 120° no se puede trisecar con regla y compás. Y en consecuencia no se puede construir un eneágono regular con regla y compás.**

# Cuadratura del círculo

Supongamos que queremos cuadrar el círculo del dibujo donde A = (0,0) y B = (1,0).




La superficie del círculo es $S = \pi$ ; entonces , el lado del cuadrado debería ser $l = \sqrt{\pi}$ .

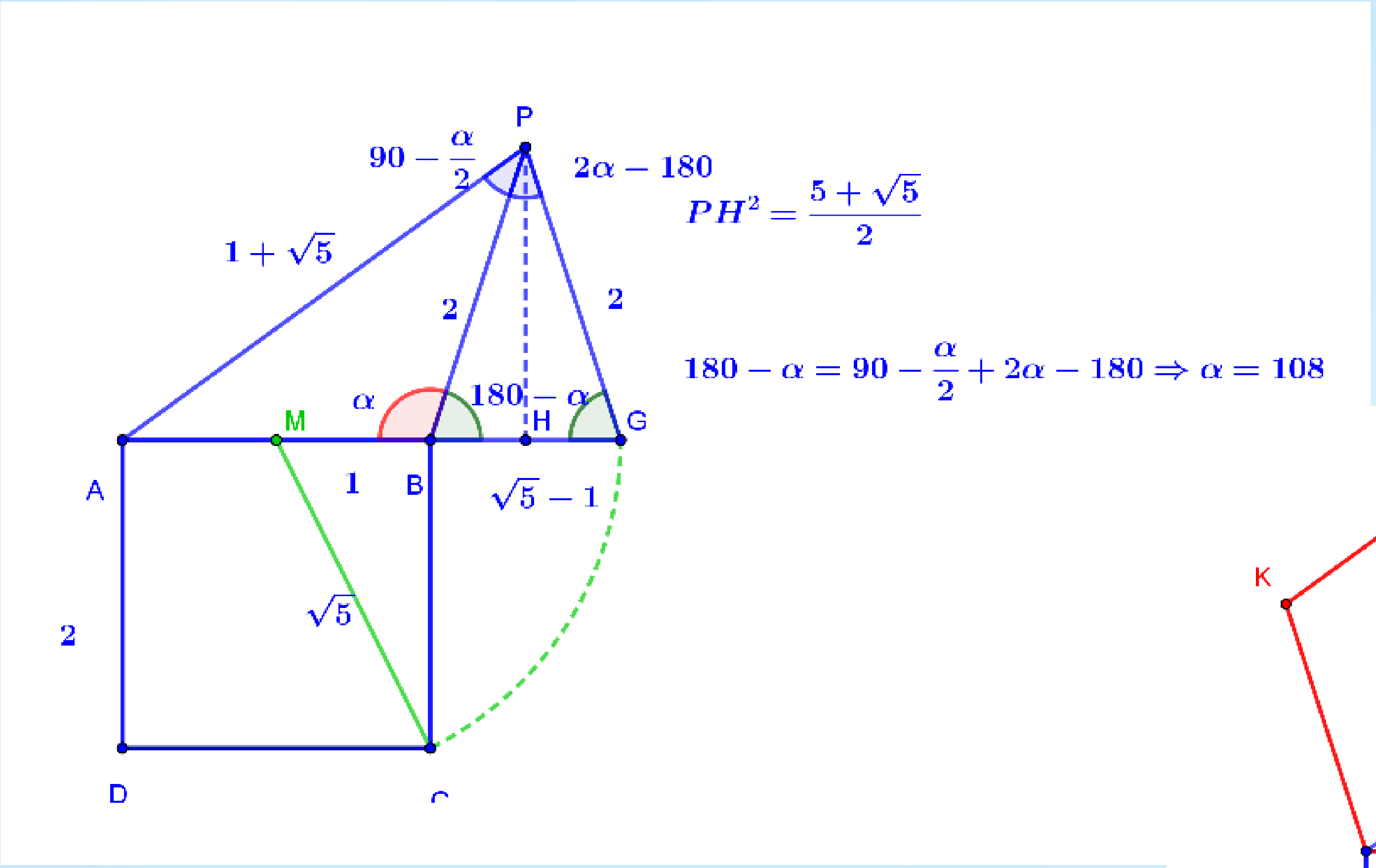
Es decir para que el círculo se pudiera cuadrar, $\sqrt{\pi}$ debería ser un número construible.

Teorema: (Lindemann, 1882) El número $\sqrt{\pi}$ no es construible.

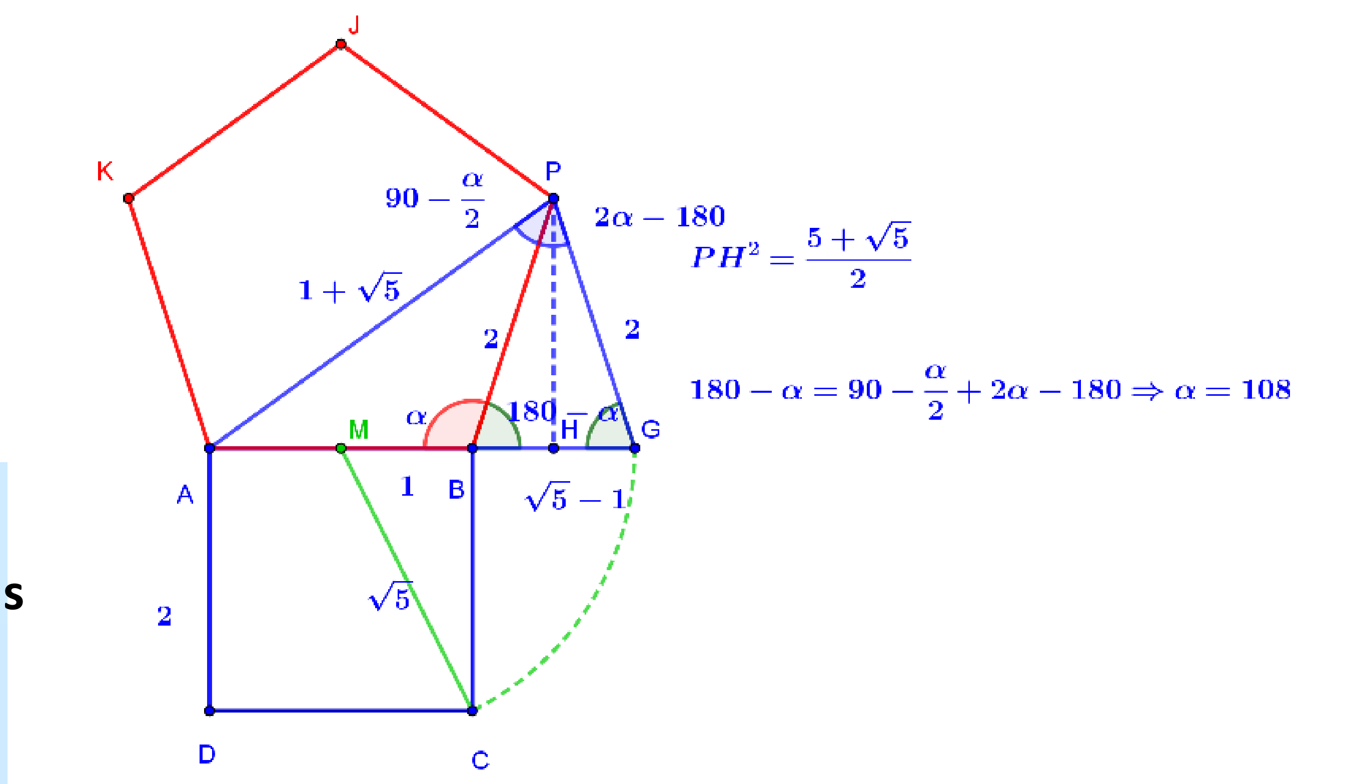
¡El círculo no se puede cuadrar con regla y compás!

# Polígonos regulares: Respuestas

**Consideremos un cuadrado de lado 2 y hagamos la siguiente construcción:**



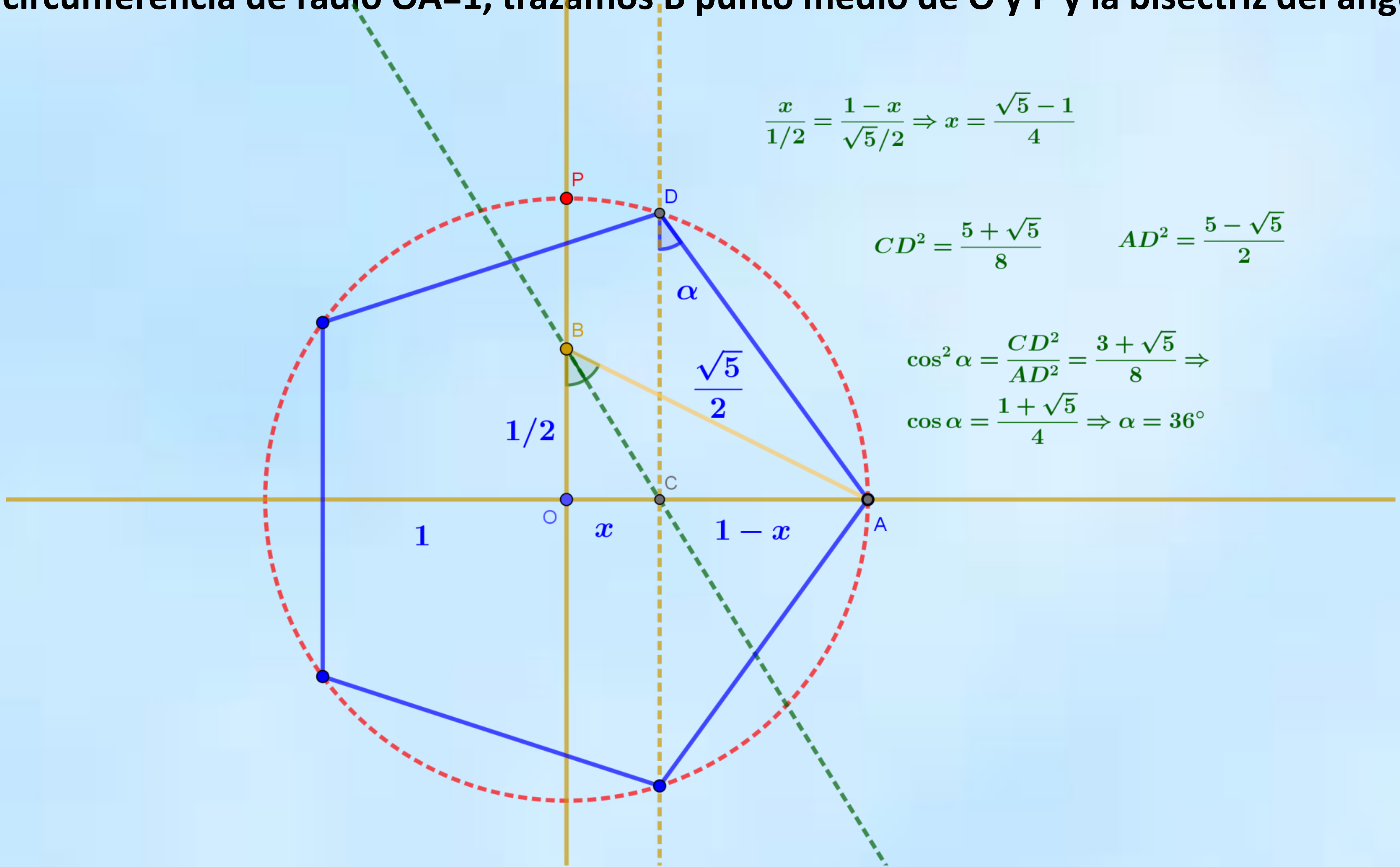

**Así hemos construido el ángulo de $108^0$ que es el ángulo interior de un pentágono**




**Ya hemos construido un pentágono con regla y compás**

# Polígonos regulares: Respuestas

**La construcción anterior aparece en los Elementos de Euclides. Veamos ahora una nueva construcción:**
**En una circunferencia de radio OA=1, trazamos B punto medio de O y P y la bisectriz del ángulo OBA:**




$$\frac{x}{1/2}=\frac{1-x}{\sqrt{5}/2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

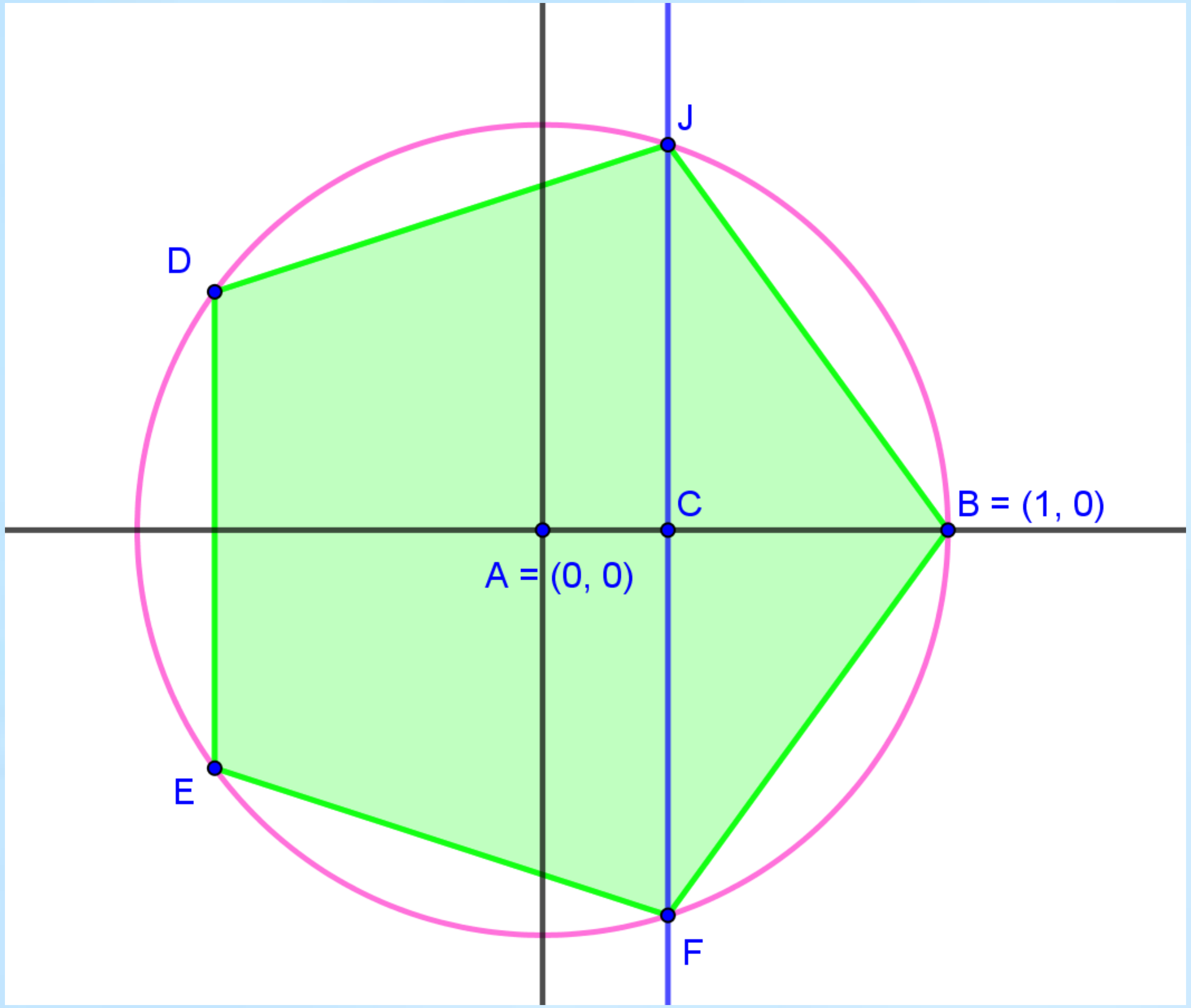
$$CD^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8} \qquad AD^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{CD^2}{AD^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}\Rightarrow$$

$$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow\alpha=36^\circ$$

# Polígonos regulares: Respuestas

**Consideremos ahora al pentágono regular y trazamos la recta paralela al eje OY desde J.**




**Hemos visto que la distancia de A a C es igual $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ que es un número construible.**

## Resultado

**El polígono regular de 5 lados (y el de 10, 20, 40, ...) es construible con regla y compás.**

## Teorema:

**(Gauss (1796)-Wantzel (1837)) Un polígono regular de p lados (p un número primo) es construible con regla y compás si y solo si p - 1 es una potencia de 2.**

# Polígonos regulares: Respuestas

Ejemplos:

De 3 y 5 lados → construibles.

De 7, 11, 13 y 19 lados → no construibles.

**Teorema:**

**(Gauss (1796)-Wantzel (1837)) Un polígono regular de n lados es construible con regla y compás sí y sólo sí cuando factorizamos n como producto de primos sólo aparece una potencia de dos y primos impares distintos tales que al restarles 1 a cada uno dan potencias de dos.**

Ejemplos:

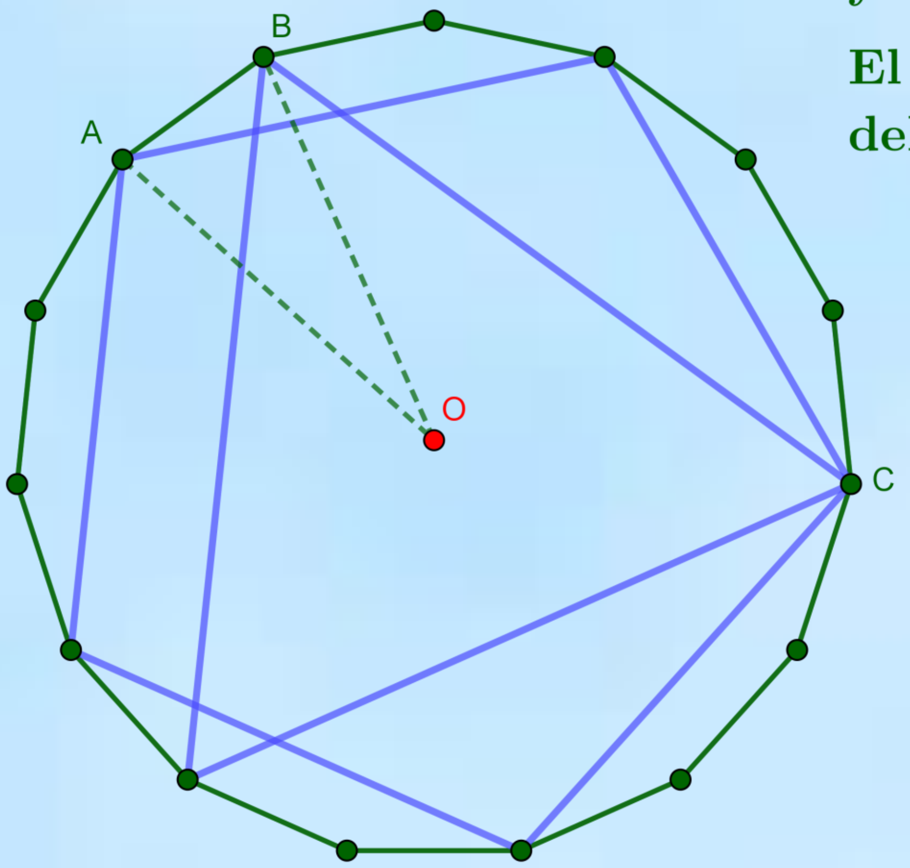
De $15 = 3 \cdot 5$ lados → construible.

De $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ lados → no construible.

De $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ lados → construible.

De $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ lados → no construible.

# Polígono regular de 15 lados



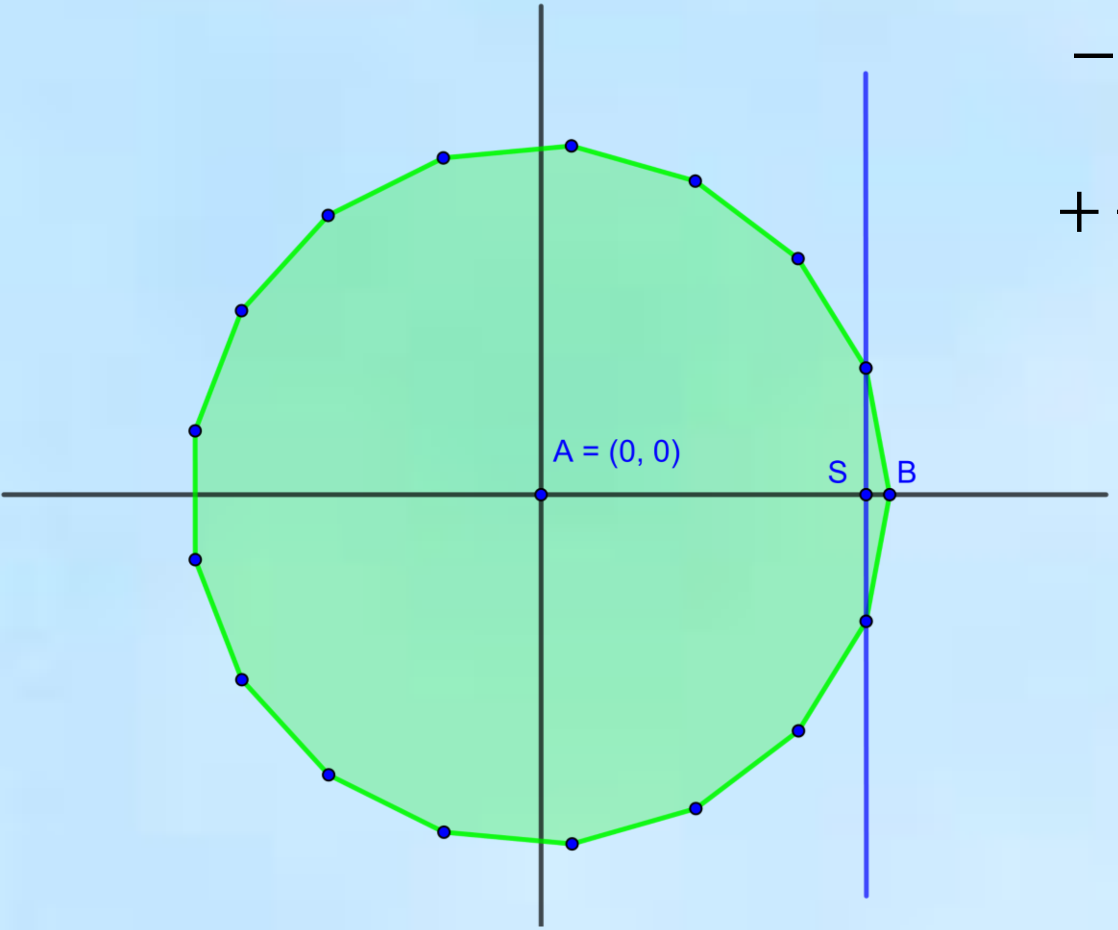

**Se dibujan, partiendo de un mismo vértice un pentágono regular y un triángulo equilátero.**

**El segundo vértice del triángulo divide a dos arcos del pentágono en tres partes iguales.**

$$\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = (72^\circ + 72^\circ) - 120^\circ = 24^\circ$$

# Polígono regular de 17 lados

**Si dibujamos un polígono regular de 17 lados, se puede probar que la distancia de A a S es igual a:**



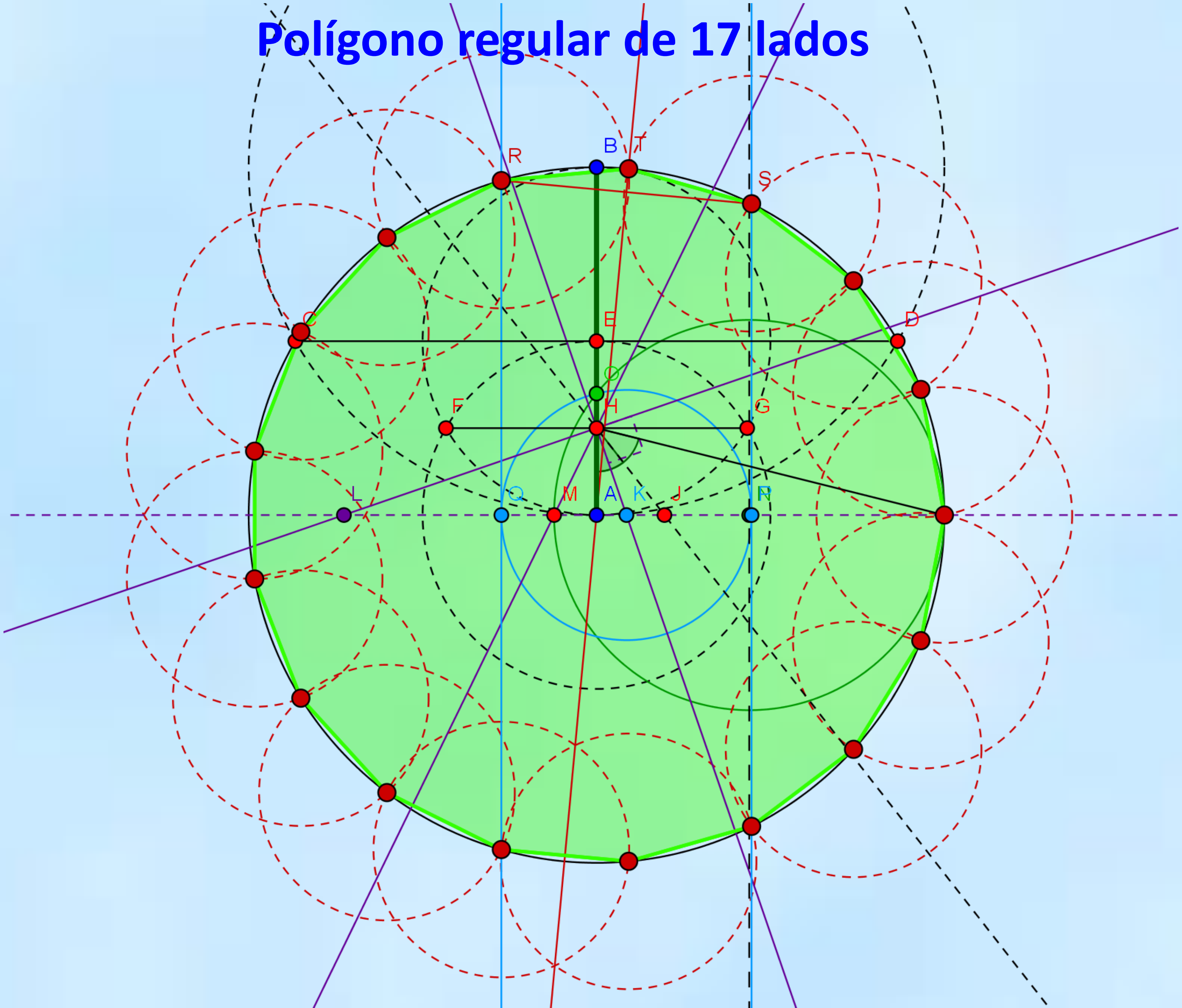

$$-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

**¡Luego, d(A, S) es un numero construible!**

**Resultado:**
**El polígono regular de 17 lados (y el de 34, 68, ...) es construible con regla y compás.**

**Pero esto ya lo sabíamos:**
**¡17 es un número primo, y 17 -1 = 16 = $2^4$!**

# Polígono regular de 17 lados



## Para terminar

**Los únicos números primos que se conocen que al restarles 1 da una potencia de dos son:**

$$3 = 2^1 + 1$$
$$5 = 2^2 + 1$$
$$17 = 2^4 + 1$$
$$257 = 2^8 + 1$$
$$65537 = 2^{16} + 1$$

**Conjetura:**

**Hay infinitos números primos de esta forma.**

## Bibliografía

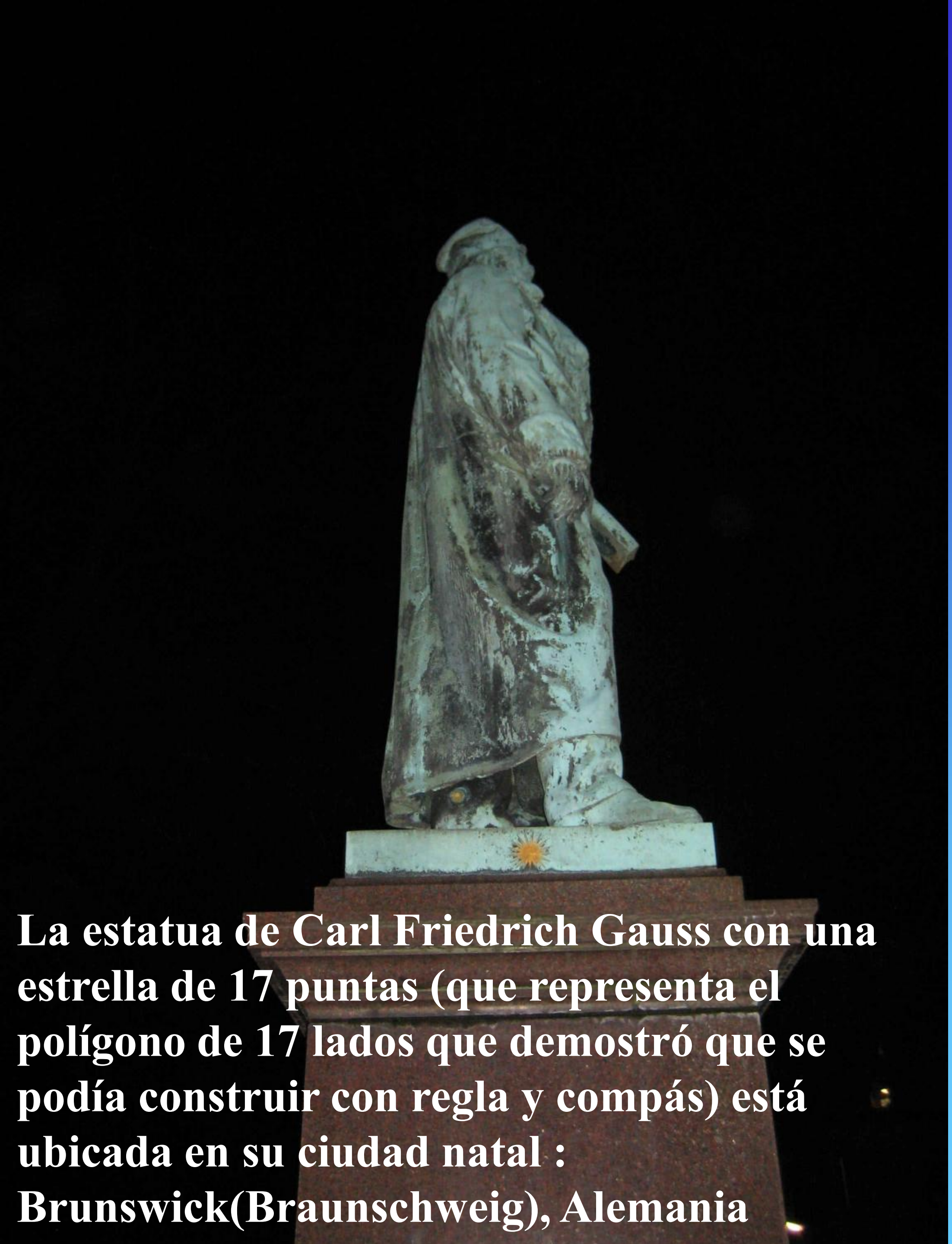

- Lecciones populares de Matemáticas. Editorial MIR: La regla en las construcciones geométricas. Construcciones geométricas mediante un compás.

- Miguel de Guzmán:
https://www.mat.ucm.es/cosasmdg/ cdsmdg/ 05edumat/geometriahoy/geometriahoy.html.

- TFG de Miguel Navarro Agüera de la Universidad de Murcia.

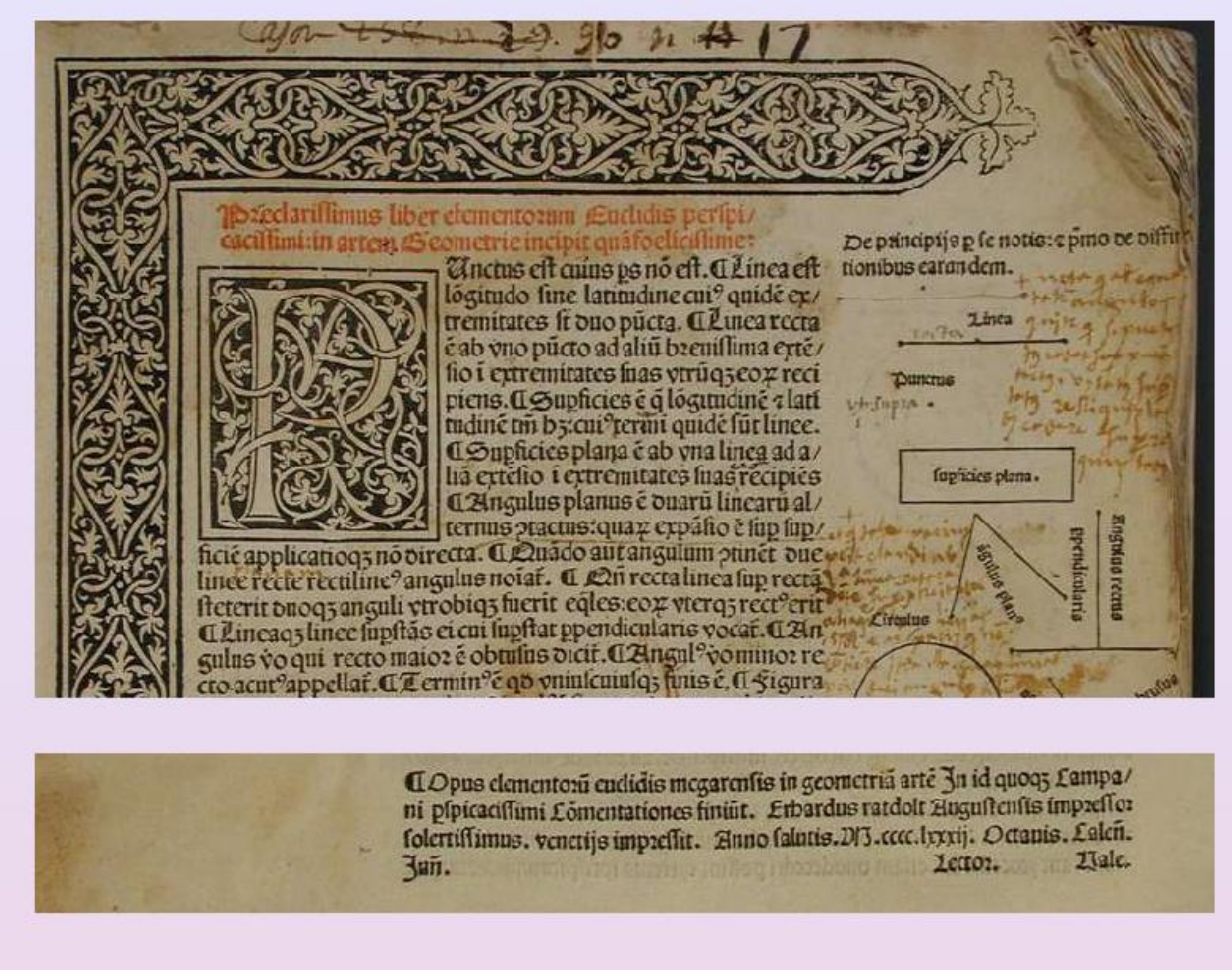
- Gaussianos: https://www.gaussianos.com/
  Primeras construcciones con regla y compás en imágenes.
  ¿Qué polígonos regulares pueden construirse con regla y compás?

- Simple Constructions for the Regular Pentagon and Heptadecagon. De Temple. The Mathematics Teacher MAY 1989, vol82, Nº 5.



La estatua de Carl Friedrich Gauss con una estrella de 17 puntas (que representa el polígono de 17 lados que demostró que se podía construir con regla y compás) está ubicada en su ciudad natal : Brunswick(Braunschweig), Alemania


La estatua dedicada a Gauss-Weber está en Gotinga, en el parque Gauss-Weber-Wall, en el centro de la ciudad.




**Primera edición impresa (Erhardt Ratdolt, Venecia, 1482) de los Elementos de Euclides (15 libros) con la versión latina de Campano de Novara y Adelardo de Bath s. XII.**
**Fragmentos de la portada y de las últimas líneas.**
**Biblioteca de San Millán de la Cogolla (La Rioja)**


**ITALO CALVINO dice que :**
***un clásico es un libro que nunca termina de decir lo que tiene que decir.***
**¡Muchas gracias!**